

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

SESSIONE ORDINARIA

Tema di: MATEMATICA

a. s. 2003-2004

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

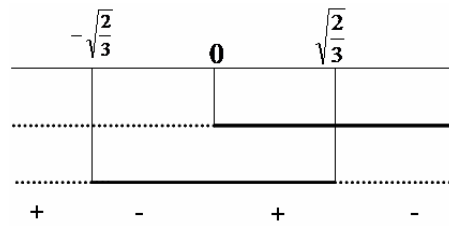
1. Disegnate il grafico G di f .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y=c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G . Precisamente: R delimitata dall'asse y , da G e dalla retta $y=c$ e S delimitata da G e dalla retta $y=c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y=c$;
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y=4/9$

Soluzione

1)

Studiamo la funzione $f(x) = 2x - 3x^3$

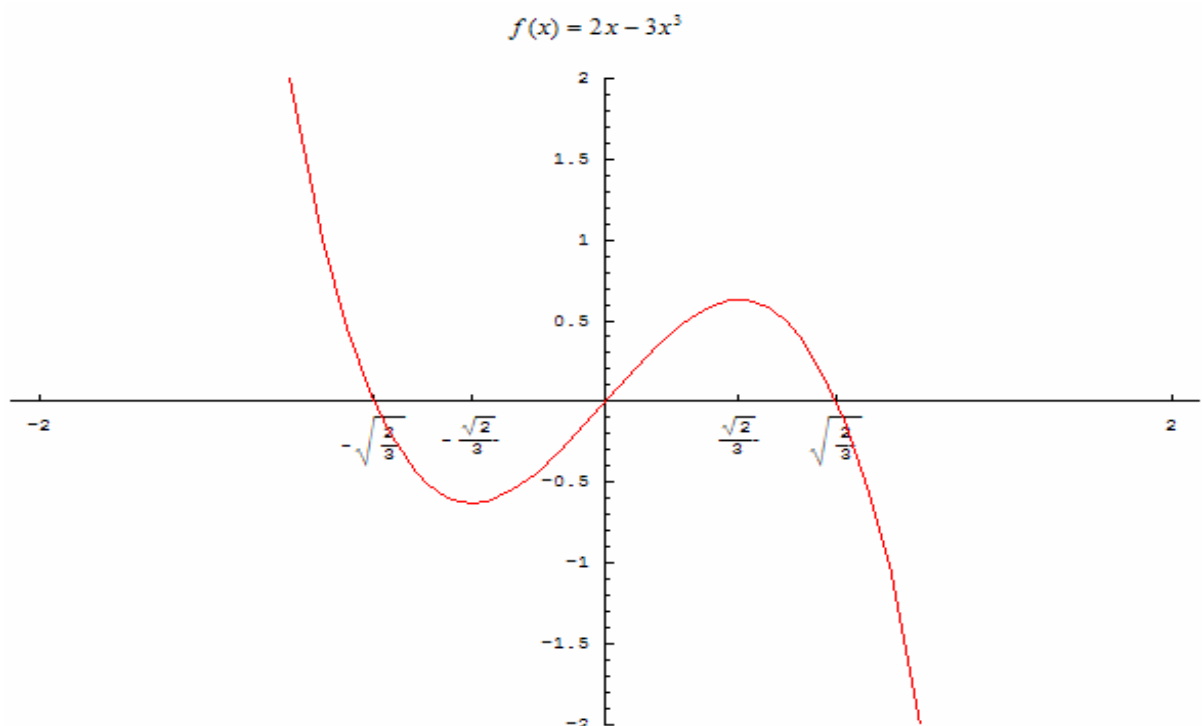
- ✚ Dominio: la funzione è definita in tutto \mathbb{R} ;
- ✚ Intersezione asse ascisse: $f(x) = 2x - 3x^3 = x(2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;
- ✚ Intersezioni asse delle ordinate: $x = 0 \rightarrow y = 0$;
- ✚ Parità o disparità: la funzione è dispari in quanto $f(-x) = 2(-x) - 3(-x)^3 = -2x + 3x^3 = -f(x)$;
- ✚ Positività: $f(x) = 2x - 3x^3 = x(2 - 3x^2) > 0$ la discutiamo col metodo del falso sistema, e cioè ponendo ambo i fattori $(x, 2 - 3x^2)$ maggiori di zero, e poi mettendo i risultati sulla stessa retta dei reali e vedendo il segno maggiore dove è soddisfatto, come rappresentato nella figura sottostante:



Per cui $f(x) = 2x - 3x^3 = x(2 - 3x^2) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

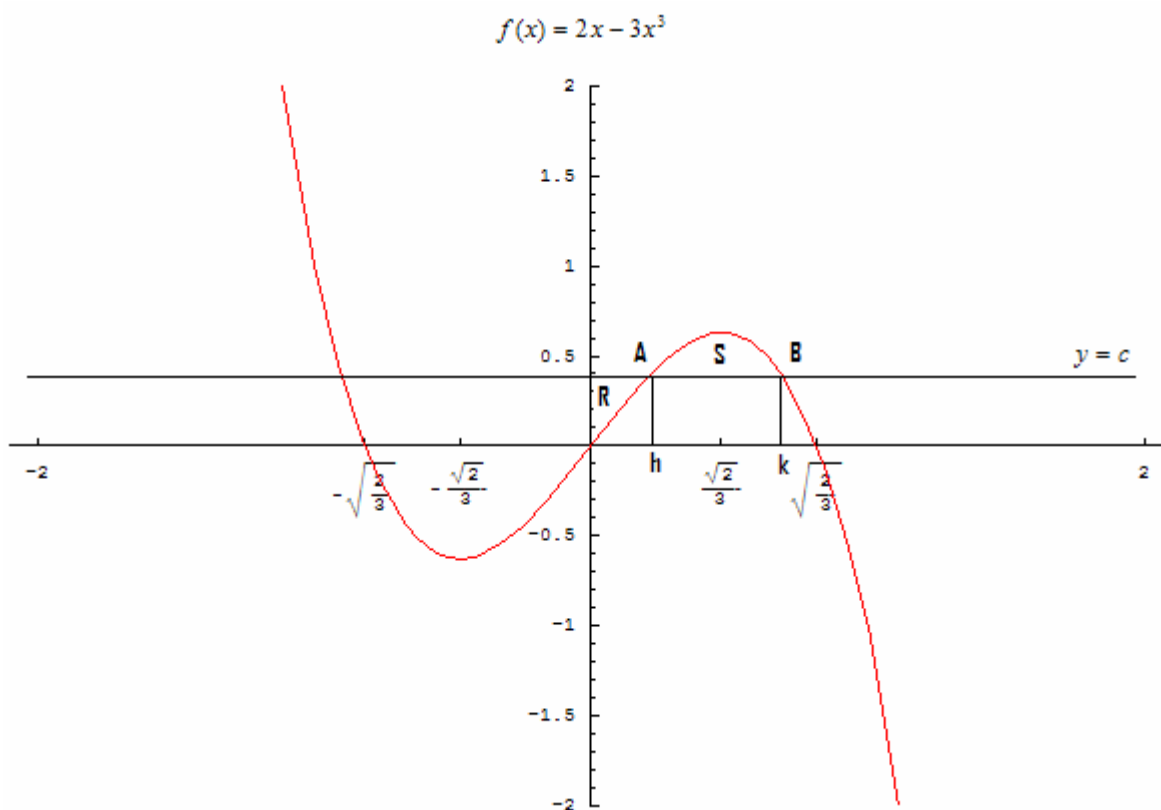
- ✚ Asintoti verticali: non ce ne sono visto che il dominio è tutto \mathbb{R} ;
- ✚ Asintoti orizzontali: non ce ne sono: infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3x^3) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3x^3) = +\infty$;
- ✚ Asintoti obliqui: non ce ne sono: infatti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x - 3x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2 - 3x^2) = -\infty$;
- ✚ Crescenza e decrescenza: la derivata prima è: $f'(x) = 2 - 9x^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ per cui la funzione è crescente in $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ e decrescente altrove; la derivata seconda è $f''(x) = -18x = 0 \Rightarrow x = 0$ per cui $(0,0)$ è un flesso. Inoltre $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -6\sqrt{2} < 0$, $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 6\sqrt{2} > 0$ per cui $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ è un minimo relativo e $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ è un massimo relativo.

Il grafico è sotto presentato:



2)

Le regioni richieste sono indicate nella figura sottostante:



dove ovviamente $0 < c < \frac{4\sqrt{2}}{9}$, condizione da soddisfare affinché nel primo quadrante ci siano due intersezioni con la curva e quindi esistano due differenti regioni R ed S.

3)

Dobbiamo imporre

$$\begin{aligned}
 A(R) = A(S) &\Rightarrow \int_0^h (c - f(x))dx = \int_h^k (f(x) - c)dx \Leftrightarrow \\
 \int_0^h (c - f(x))dx - \int_h^k (f(x) - c)dx &= 0 \Leftrightarrow \\
 \int_0^h (c - f(x))dx + \int_h^k (c - f(x))dx &= 0 \Leftrightarrow \\
 \int_0^k (c - f(x))dx = 0 &\Leftrightarrow \int_0^k [c - 2x + 3x^3]dx = 0 \\
 \left[cx - x^2 + \frac{3}{4}x^4 \right]_0^k &= ck - k^2 + \frac{3}{4}k^4 = 0 \Leftrightarrow \\
 3k^4 - 4k^2 + 4ck &= 0
 \end{aligned}$$

Ora poiché $k \neq 0$ la condizione soprastante può essere scritta anche come $3k^3 - 4k + 4c = 0$.

Inoltre il punto B appartiene alla curva, cioè $f(k) = c \Rightarrow 3k^3 - 2k + c = 0$. Quindi dobbiamo risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3k^3 - 4k + 4c = 0 \\ 3k^3 - 2k + c = 0 \end{cases}$$

e sottraendo l'una dall'altra si trova facilmente $c = \frac{2}{3}k$.

Ora sostituendo questo valore nella seconda equazione abbiamo:

$$3k^3 - 2k + \frac{2}{3}k = 0 \Rightarrow 3k^3 - \frac{4}{3}k = 3k\left(k^2 - \frac{4}{9}\right) = 0 \Rightarrow k = 0, k = \pm \frac{2}{3}$$

Ora le soluzioni $k = 0, k = -\frac{2}{3}$ non sono accettabili perché forniscono in corrispondenza un valore

di $c = \frac{2}{3}k$ negativo o nullo, per cui il valore accettabile è $k = \frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{4}{9}$. Quindi il punto B ha

coordinate $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

L'altro punto di intersezione del primo quadrante, A, lo si trova allora dalla soluzione dell'equazione

$$2x - 3x^3 = \frac{4}{9} \Rightarrow 27x^3 - 18x + 4 = 0$$

Ora ricordando, dal discorso appena fatto, che $x = k = \frac{2}{3}$ appartiene alla curva $f(x) = 2x - 3x^3$, si

può applicare Ruffini ed abbassare il grado dell'equazione a 2: infatti si ha:

$$27x^3 - 18x + 4 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)(27x^2 + 18x - 6) = (3x - 2)(9x^2 + 6x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{3}, x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{9} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$$

in cui la soluzione $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{3}$, che rappresenta l'intersezione della retta con la curva nel

secondo quadrante, va scartata in quanto negativa.

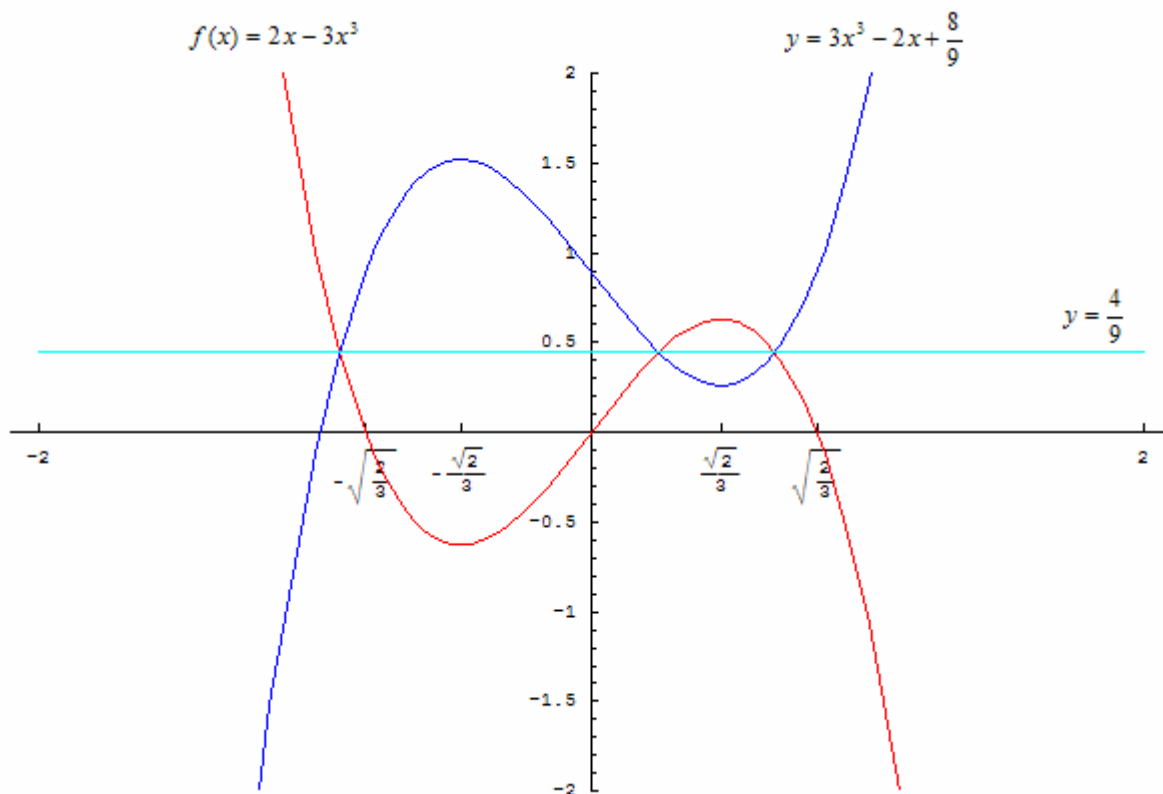
In conclusione $x_A = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}$, $x_B = \frac{2}{3}$, per cui $A = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$ e $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$

4)

Le equazioni della simmetria che trasformano $f(x) = 2x - 3x^3$ nella sua simmetrica e viceversa, sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2\left(\frac{4}{9}\right) - y = \frac{8}{9} - (2x - 3x^3) \end{cases}$$

Per cui l'equazione della curva simmetrica, tralasciando gli apici, sarà $y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$, come rappresentato nella figura seguente:



PROBLEMA 2

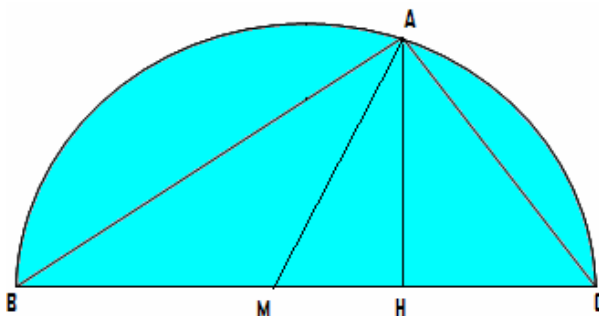
ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC .

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC .
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3} \text{ metri}$, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K .

Soluzione

1)

Si consideri la figura seguente:



Ogni triangolo rettangolo è inscritto in una semicirconferenza con diametro pari all'ipotenusa; per cui la mediana che divide l'ipotenusa in due parti uguali non è altro che il segmento congiungente un punto della semicirconferenza con il centro; cioè per definizione di raggio la mediana coincide con il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo, per cui è la metà dell'ipotenusa BC .

2)

Facciamo tali assunzioni:

- c lunghezza del cateto AB
- b lunghezza del cateto AC
- a lunghezza dell'ipotenusa BC
- h misura dell'altezza AH

In base a tali assunzioni, ricordando che l'area di un triangolo rettangolo è $A = \frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$, va risolto

il seguente sistema:

$$\begin{cases} bc = ah \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{ah}{c} \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{cases}$$

Quindi sostituendo si ha:

$$c^2 + \left(\frac{ah}{c}\right)^2 = a^2 \Rightarrow c^2 + \frac{a^2 h^2}{c^2} - a^2 = 0 \Rightarrow c^4 - c^2 a^2 + a^2 h^2 = 0$$

Cioè ci troviamo di fronte ad una equazione biquadratica che si risolve ponendo $x = c^2$ da cui:

$$x^2 - xa^2 + a^2 h^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 h^2}}{2}$$

e quindi $c = \pm \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 h^2}}{2}}$ in cui la soluzione col meno va evidentemente scartata in quanto

negativa. Quindi $c = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 h^2}}{2}}$. Ora ricordando la formula dei radicali doppi si ha:

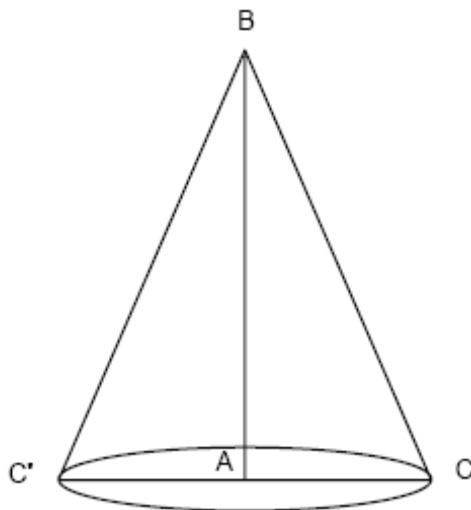
$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 h^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - (a^4 - 4a^2 h^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - (a^4 - 4a^2 h^2)}}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{a^2 + 2ah}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ah}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah} \right] \end{aligned}$$

Per l'altro cateto invece:

$$\begin{aligned} b &= \frac{ah}{c} = \frac{ah}{\frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah} \right]} = \frac{2ah \left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah} \right)}{a^2 + 2ah - (a^2 - 2ah)} = \\ &= \frac{2ah \left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah} \right)}{4ah} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}}{2} \end{aligned}$$

3)

Consideriamo la figura sottostante:



Posto $AB = x$ si ha $AC = \sqrt{3 - x^2}$ con $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Il volume del cono è pari a:

$$V_{cono}(x) = \frac{1}{3} A_{base} * h = \frac{1}{3} \pi x (3 - x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}$$

Calcoliamo ora le derivate:

$$V'_{cono}(x) = \pi(1 - x^2) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$V''_{cono}(x) = -2\pi x$$

$$V''_{cono}(1) = -2\pi < 0$$

per cui il volume massimo lo si raggiunge per $x = 1$ ed è pari a

$$V_{cono}(x_{max}) = V_{cono}(1) = \frac{2\pi}{3} (m^3) \cong 2.0944(m^3) = 2094.4(\text{litri})$$

Un modo alternativo di procedere è utilizzare la trigonometria, per cui posto $\widehat{BCA} = x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, si

ha:

$$AC = \sqrt{3} \cos(x), \quad AB = \sqrt{3} \sin(x)$$

per cui

$$V_{cono}(x) = \frac{1}{3} A_{base} * h = \frac{1}{3} \pi (3 \cos^2(x)) (\sqrt{3} \sin(x)) = \sqrt{3} \pi \sin(x) \cos^2(x) = \pi \sqrt{3} g(x)$$

con $g(x) = \sin(x) \cos^2(x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Anche in tal caso si procede attraverso le derivate per la massimizzazione della funzione

$g(x) = \sin(x) \cos^2(x)$ con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos^3(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) = \\ &= \cos(x)[\cos^2(x) - 2\sin^2(x)] = \\ &= \cos(x)[3\cos^2(x) - 2] \end{aligned}$$

Ora $\cos(x) \geq 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ per cui :

$$g'(x) = \cos(x)[3\cos^2(x) - 2] \geq 0 \Rightarrow [3\cos^2(x) - 2] \geq 0 \Rightarrow \cos(x) \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \cup \cos(x) \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ora la disequazione $\cos(x) \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ non è mai verificata poiché in esso il

coseno è sempre positivo, mentre $\cos(x) \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è verificata per $0 \leq x \leq \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, per

cui in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $g'(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Ora per la derivata seconda si ha:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -9\cos^2(x)\sin(x) + 2\sin(x) = \sin(x)[2 - 9\cos^2(x)] \\ g''\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2 - 9\left(\frac{2}{3}\right)\right] = -\frac{4}{\sqrt{3}} < 0 \end{aligned}$$

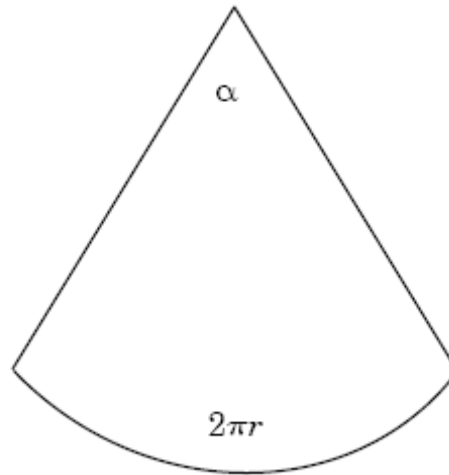
In conclusione il valore dell'angolo che massimizza il volume è $x = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ed il volume

massimo è $V_{cono}(x_{\max}) = V_{cono}\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \pi\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi(m^3) \cong 2094.4(\text{litri})$ come già

precedentemente mostrato.

4)

Lo sviluppo piano della superficie laterale del cono rappresenta un settore circolare di raggio pari all'apotema del cono, pari cioè all'ipotenusa del triangolo di partenza come sotto rappresentato:



Il nostro scopo è determinare l'angolo α . Ricordando che la lunghezza di un arco di circonferenza è pari al prodotto del raggio per l'angolo al centro espresso in radianti si ha: $l = BC * \alpha$, dove l rappresenta la circonferenza di base del cono e quindi è $l = 2\pi r = 2\pi\sqrt{3-1} = 2\pi\sqrt{2}$ per cui

$$\alpha = \frac{l}{BC} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi \cong 5.1302(rad) \quad \text{ed espresso in gradi è}$$

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi * \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 180^\circ * \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cong 293^\circ 56' 20''.$$

QUESTIONARIO

1. Trovate due numeri reali a e b , $a \neq b$ che hanno somma e prodotto uguali.
2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1,3)$ e un minimo relativo in $(-1,2)$.
4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
5. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$.
6. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ . Qual è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?
9. Calcolate $\int_0^1 \arcsen x dx$.
10. Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?

Soluzione**I)**

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = ab \\ a \neq b \end{cases}$$

Ora la prima condizione, quella di uguaglianza tra somma e prodotto può essere riscritta come

$$b = \frac{a}{a-1},$$
 per cui tale relazione non è definita per $a = 1$. Inoltre la condizione $a \neq b$ comporta

$$\frac{a}{a-1} \neq a \Rightarrow a(a-1) \neq a \Rightarrow a^2 - 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \cap a \neq 2.$$
 Quindi tutte le coppie (a, b) che

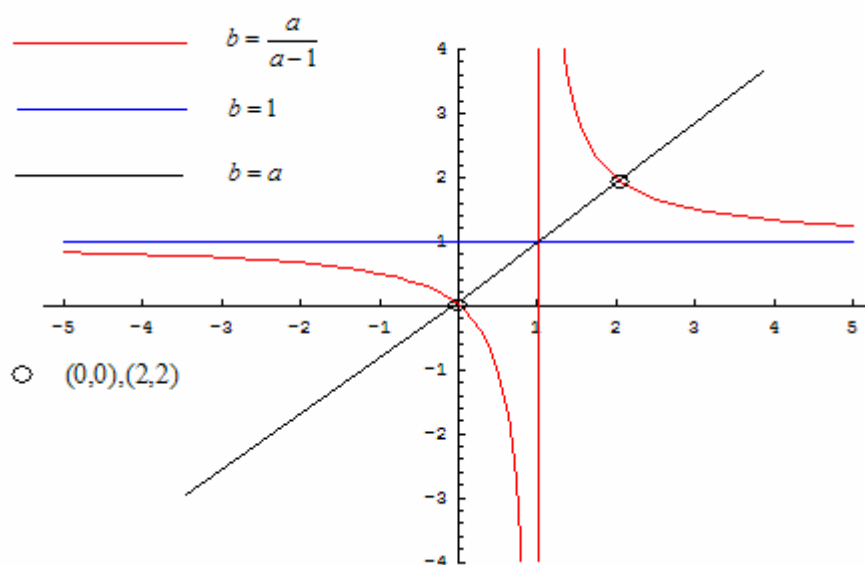
soddisfano al sistema

$$\begin{cases} b = \frac{a}{a-1} \\ a \neq 0 \cap a \neq 2 \end{cases}$$

soddisfano le richieste del quesito.

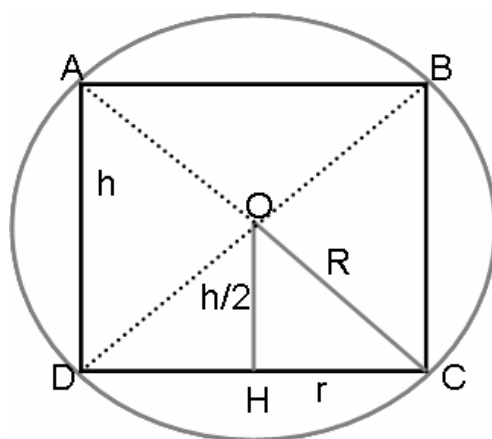
Il quesito può anche essere interpretato geometricamente: in particolare le coppie di numeri (a, b) che soddisfano al quesito, sono quelle coppie che danno luogo ad una funzione omografica di

asintoto verticale $a = 1$ ed asintoto orizzontale $b = 1$, da cui vanno escluse le due coppie $(0,0), (2,2)$ per le considerazioni sopra fatte, perché $(0,0), (2,2)$ soddisfano alla condizione che la somma sia uguale al prodotto, ma hanno ascissa ed ordinata uguale. Cioè in conclusione le coppie richieste sono tutte quelle che appartengono all'iperbole di equazione $b = \frac{a}{a-1}$ cui vanno sottratte quelle date dall'intersezione dell'iperbole con la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $b = a$ come sotto rappresentato:



2)

Si consideri la figura seguente in cui vengono rappresentati in sezione la sfera ed il cilindro equilatero:



La sezione del cilindro, essendo equilatero, è il quadrato ABCD. L'altezza h del cilindro allora coinciderà col diametro di base, per cui $h = 2r$. Inoltre il raggio R della sfera sarà la metà della

diagonale del quadrato, per cui $R = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$.

La superficie totale del cilindro è $S_{cilindro} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$ mentre quella della sfera è

$$S_{sfera} = 4\pi R^2, \text{ per cui } \frac{S_{cilindro}}{S_{sfera}} = \frac{2\pi r(h+r)}{4\pi R^2} = \frac{2\pi r(2r+r)}{4\pi (r\sqrt{2})^2} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$$

3)

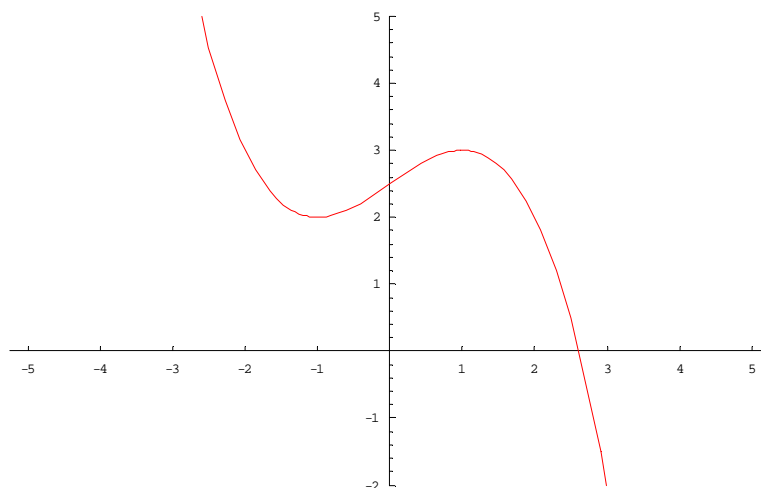
Una funzione come quella richiesta può essere una cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La derivata prima della funzione è $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, ed imponendo $y'(\pm 1) = 0$ si ricavano due condizioni : $3a + 2b + c = 0, 3a - 2b + c = 0$ e se si sottrae l'una dall'altra si ricava subito $b = 0$ e $c = -3a$. La derivata seconda è $y'' = 6ax + 2b = 6ax$, ed affinché la funzione abbia il massimo in (1,3) o il minimo in (-1,2) deve accadere che $y''(1) = 6a < 0 \Rightarrow a < 0$ oppure $y''(-1) = -6a > 0 \Rightarrow a < 0$, per cui scegliendo $a < 0$ vengono soddisfatte le condizioni che i punti (1,3) e (-1,2) siano estremi relativi. Inoltre imponendo il passaggio per i punti suddetti si ricavano gli altri parametri della curva $y = ax^3 + cx + d$: infatti si ricavano altre due condizioni: $a + c + d = 3, -a - c + d = 2$. Il sistema da risolvere è allora :

$$\begin{cases} c = -3a \\ a + c + d = 3 \\ -a - c + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3a \\ -2a + d = 3 \\ 2a + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{3}{4} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

con $a = -\frac{1}{4}$ effettivamente minore di zero.

La curva è allora $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ con grafico sotto presentato:



4)

Consideriamo la funzione $y = e^x + 3x$. Si ha:

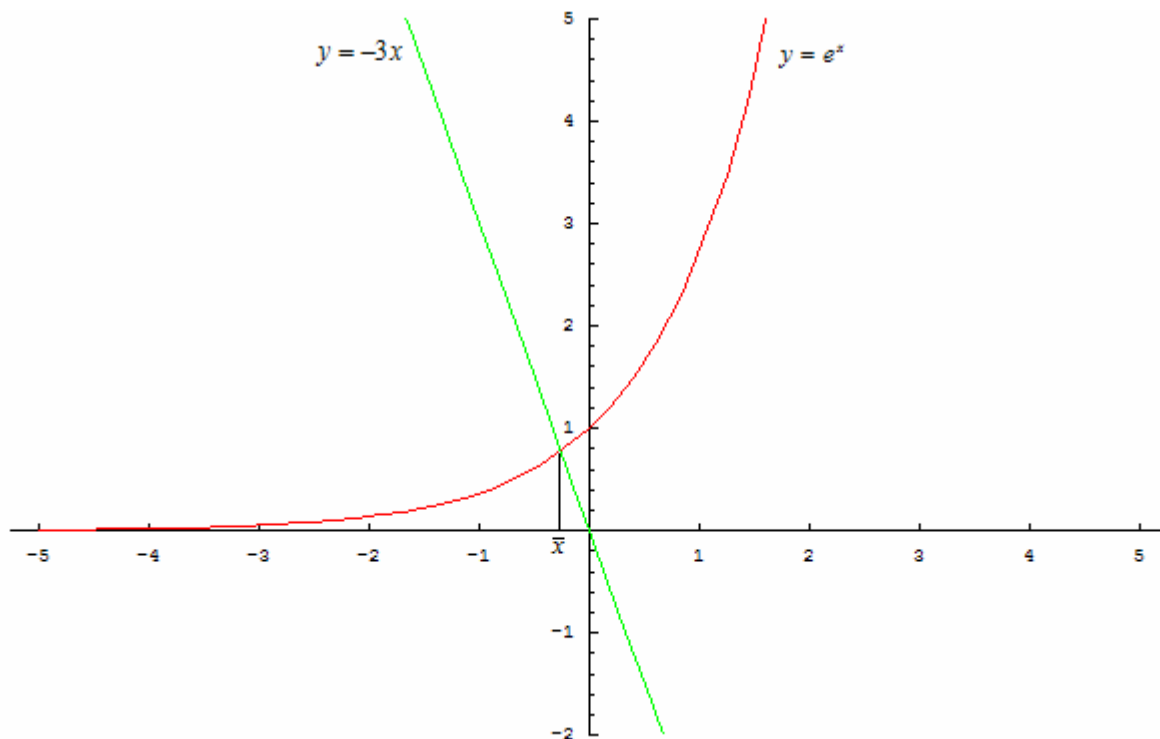
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 3x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3x) = -\infty$$

Inoltre la funzione è sempre crescente visto che $y' = e^x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione è sempre crescente, a $-\infty$ tende a $-\infty$, a $+\infty$ tende a $+\infty$, quindi essa intersecherà l'asse delle ascisse in uno ed un sol punto.

Un altro modo di procedere è la via grafica risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x \end{cases}$$

sotto rappresentato:



Per capire in che intervallo si trova l'unico zero si nota che $y(0) = 1 > 0$, $y(-1) = e^{-1} - 3 < 0$ per cui per il teorema degli zeri $\exists \bar{x} \in (-1, 0): e^{\bar{x}} + \bar{x} = 0$. In particolare con uno dei metodi numerici preferiti (ad esempio quello di bisezione) si calcola che $\bar{x} \cong -0.258$.

Applichiamo tale metodo all'intervallo $(-1, 0)$:

$$1. \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right);$$

2. $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} - \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right);$
3. $f\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt[8]{e^3}} - \frac{9}{8} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right);$
4. $f\left(-\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{\sqrt[16]{e^5}} - \frac{15}{16} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}\right);$
5. $f\left(-\frac{9}{32}\right) = \frac{1}{\sqrt[32]{e^9}} - \frac{27}{32} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{9}{32}, -\frac{1}{4}\right);$
6. $f\left(-\frac{17}{64}\right) = \frac{1}{\sqrt[64]{e^{17}}} - \frac{51}{64} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{17}{64}, -\frac{1}{4}\right);$
7. $f\left(-\frac{33}{128}\right) = \frac{1}{\sqrt[128]{e^{33}}} - \frac{93}{128} > 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{33}{128}, -\frac{17}{64}\right);$
8. $f\left(-\frac{67}{256}\right) = \frac{1}{\sqrt[256]{e^{67}}} - \frac{201}{256} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{33}{128}, -\frac{67}{256}\right);$
9. $f\left(-\frac{133}{512}\right) = \frac{1}{\sqrt[512]{e^{133}}} - \frac{399}{512} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{33}{128}, -\frac{133}{512}\right);$
10. $f\left(-\frac{265}{1024}\right) = \frac{1}{\sqrt[1024]{e^{265}}} - \frac{795}{1024} < 0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{33}{128}, -\frac{265}{1024}\right)$

Quindi $\bar{x} \in \left(-\frac{33}{128}, -\frac{265}{1024}\right) \approx (-0.257812, -0.258789)$ per cui $\bar{x} \cong -0.258$; in particolare l'approssimazione potrebbe essere più precisa e trovare $\bar{x} \cong -0.257628$.

5)

Esistono infinite espressioni di $g(x)$ che soddisfano alle ipotesi del problema: quella più banale è

$$\text{la funzione non costante } g(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

Un'altra famiglia di espressioni può essere $g(x) = \begin{cases} 3 + (x-2)^n & x \neq 2, n \in \mathbb{R}^+ \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ e così via.

6)

$$f(x) = 3\ln(x) \Rightarrow f' = \frac{3}{x}$$

$$g(x) = \ln(2x)^3 \Rightarrow g' = \frac{3 * 2 * (2x)^2}{(2x)^3} = \frac{3 * 2}{2x} = \frac{3}{x}$$

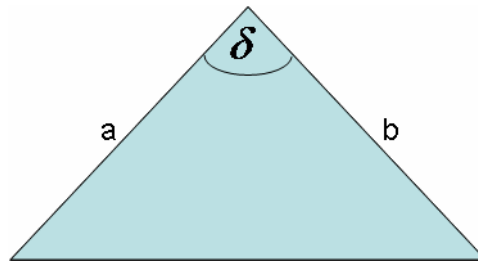
Le due funzioni presentano la stessa derivata perché differiscono per una costante: infatti

$$f(x) - g(x) = 3\ln(x) - \ln(2x)^3 = 3\ln(x) - 3\ln(2x) = 3\ln(x) - 3\ln(x) - 3\ln(2) = -3\ln 2$$

per cui, ricordando che la derivata di una costante è zero, è stato dimostrato quanto richiesto.

7)

Si consideri la figura seguente:



Per una nota formula trigonometrica l'area di un triangolo può essere espressa come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, per cui $A_T = \frac{1}{2}ab\sin(\delta)$ e tale area è massima quando è massimo il seno, per cui è massima quando $\sin(\delta) = 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$, cioè è massima per un triangolo rettangolo.

8)

Il grado sessagesimale si definisce come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro ed i suoi sottomultipli sono il primo ed il secondo.

Il radiante misura l'angolo al centro che sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio.

Il grado centesimale rappresenta invece la quattrocentesima parte dell'angolo giro.

La relazione tra grado e radiante è:

$$\frac{\alpha_{rad}}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \alpha^\circ = 180^\circ \left(\frac{\alpha_{rad}}{\pi} \right)$$

In particolare se $\alpha_{rad} = 1 \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17' 44''$.

La relazione tra gradi sessagesimali e centesimali è $\frac{\alpha_{cent}^\circ}{\alpha_{sess}^\circ} = \frac{400^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \alpha_{sess}^\circ = 0.9\alpha_{cent}^\circ$ e se

$$\alpha_{cent}^\circ = 1 \Rightarrow \alpha_{sess}^\circ = 0.9^\circ = 0^\circ 0' 54''.$$

9)

L'integrale richiesto lo si calcola con l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin(x) dx &= [x \arcsin(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= [x \arcsin(x)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 [(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}] dx = \\ &= [x \arcsin(x)]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \\ &= [x \arcsin(x)]_0^1 + \left[\sqrt{(1-x^2)} \right]_0^1 = \\ &= \arcsin(1) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

10)

Ricordiamo come si definisce una funzione:

$$f:A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in A \exists ! y \in B : y = f(x)$$

Dobbiamo allora creare una corrispondenza tra tutti gli elementi di A e quelli di B (non necessariamente tutti quelli di B), potendo ripetere anche lo stesso elemento. Per cui il numero di applicazioni è dato dalle disposizioni di 3 oggetti in gruppi di 4, e ricordando il calcolo combinatorio tale numero è pari a $D'_{n,k} = n^k = 3^4 = 81$.