M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

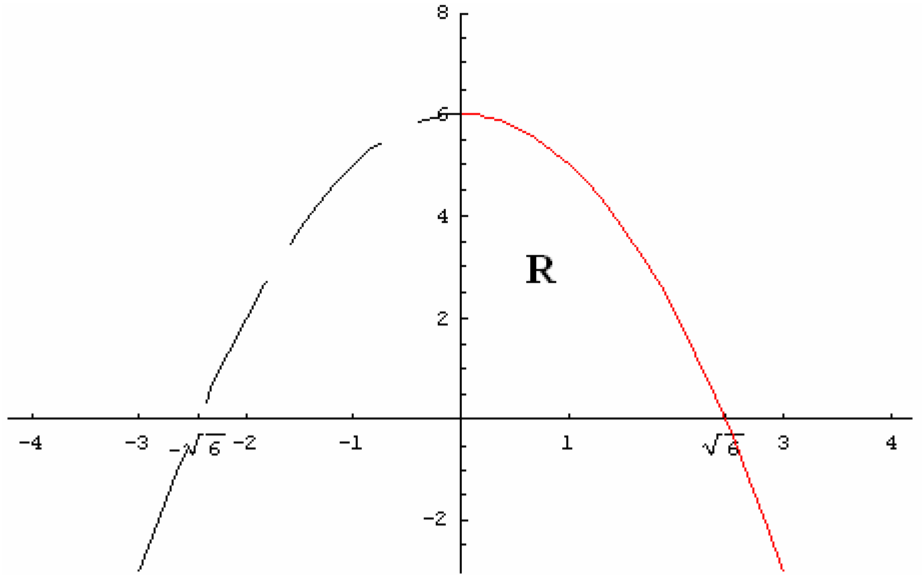
Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta *y* = *k* dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di *t* per il quale $A(t)$ è minima.

Soluzione

1)

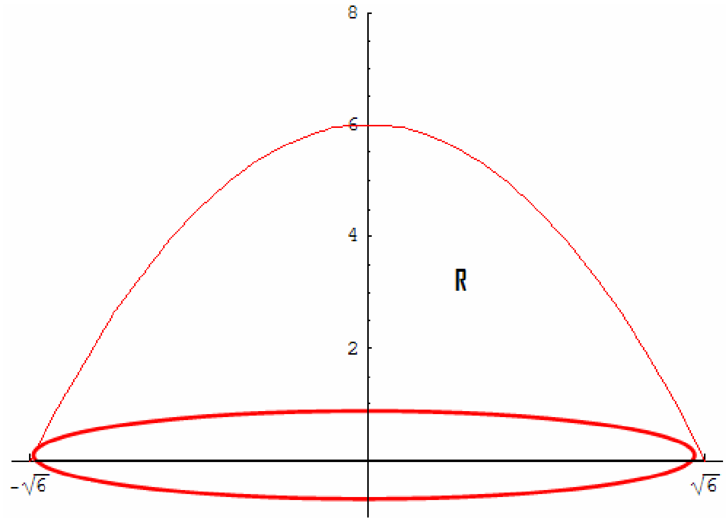
La curva di equazione $y = 6 - x^2$ è una parabola con vertice in $V = (0,6)$ e concavità rivolta verso il basso, ed interseca l'asse delle ascisse nei punti $A = (\sqrt{6},0), B = (-\sqrt{6},0)$ come sotto rappresentato:



La figura soprastante evidenzia anche la regione **R** identificata da:

$$\mathbf{R}: \begin{cases} y = 6 - x^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Per la determinazione del volume richiesto si consideri la figura sottostante che rappresenta la regione di cui bisogna determinare il volume a seguito di una rotazione della regione **R** intorno all'asse delle ordinate:



Poiché la regione **R** ruota attorno all'asse delle ordinate, allora per il teorema di Guldino il volume derivante sarà pari a:

$$V = \pi \int_0^6 [g(y)]^2\, dy$$

dove $g(y)$ rappresenta l'arco di curva AV. La parabola di equazione $y = 6 - x^2$ può essere pure riscritta come

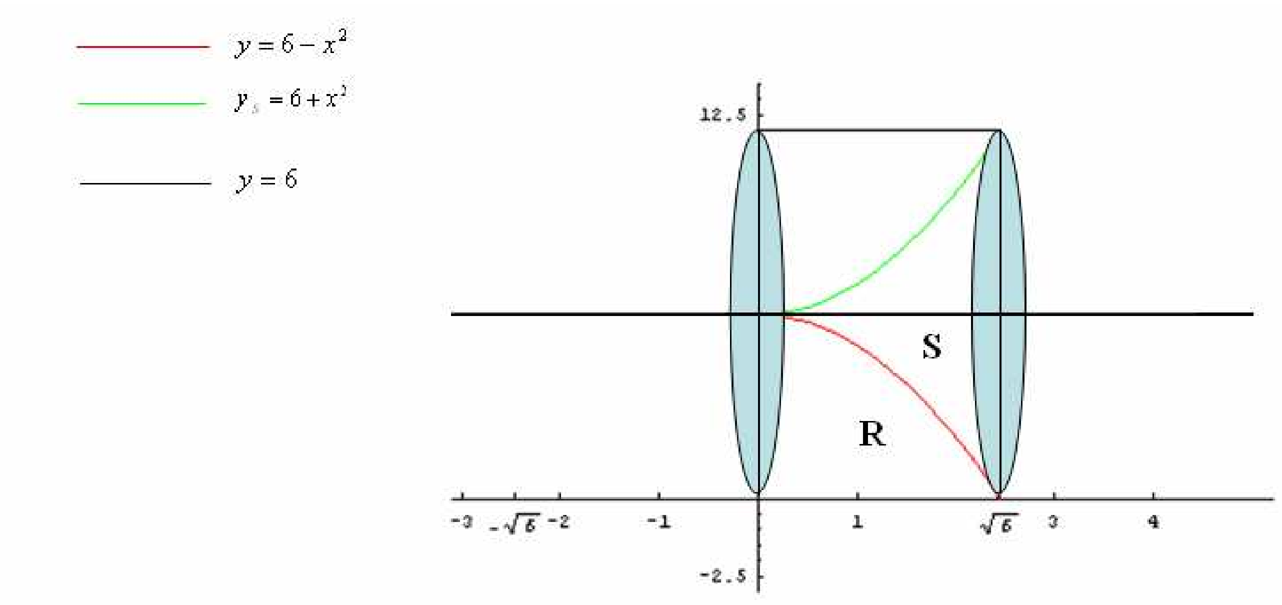
$$\begin{cases} x = \sqrt{6-y} & 0 \le x \le \sqrt{6}, 0 \le y \le 6 \\ x = -\sqrt{6-y} & -\sqrt{6} \le x \le 0, 0 \le y \le 6 \end{cases}$$

per cui l'arco di curva AV è rappresentato dall'equazione $x = \sqrt{6-y}$, $0 \le x \le \sqrt{6}, 0 \le y \le 6$. In definitiva

$$V = \pi \int_0^6 [g(y)]^2\, dy = \pi \int_0^6 (6-y)dy = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2} \right]_0^6 = \pi(36-18) = 18\pi$$

2)

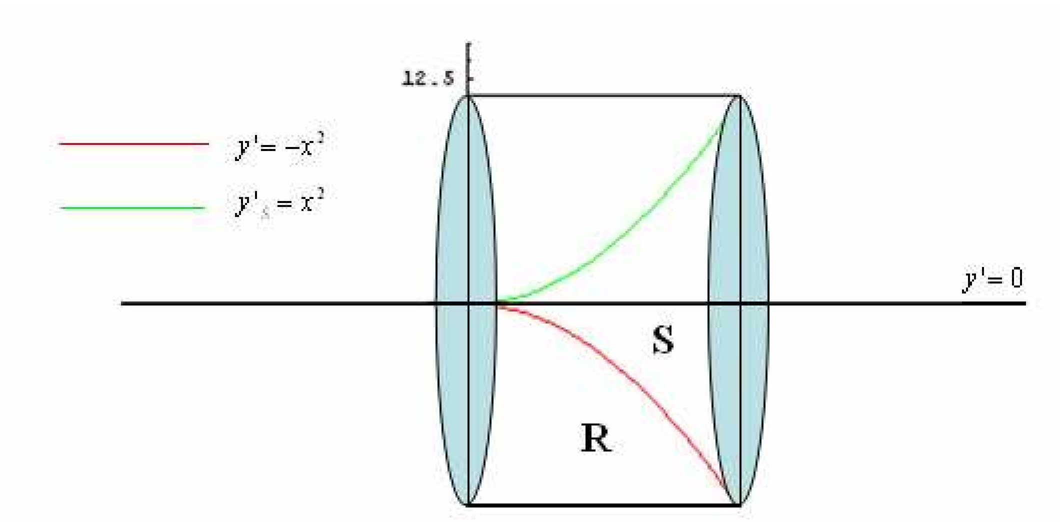
La parabola simmetrica della parabola di equazione $y = 6 - x^2$ rispetto alla retta di equazione $y = 6$ ha equazione $y_S = 2*(6) - y = 6 + x^2$ come rappresentato dalla figura sottostante:



Il volume richiesto non è altro che il volume del cilindro V_C di altezza $h = \sqrt{6}$ ed area di base $A_b = \pi r^2 = \pi(6)^2 = 36\pi$ cui va sottratto il volume dovuto alla rotazione della regione **S** attorno alla retta $y = 6$. Per il calcolo di questo secondo volume è conveniente considerare un nuovo sistema di riferimento con

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 6 \end{cases}$$

Questa trasformazione non comporta alcun cambiamento del volume, visto che il volume è indipendente dal sistema di riferimento prescelto.
In tal modo le due parabole diventeranno, nel nuovo sistema di riferimento, $y' = -x^2, y'_S = x^2$ e la retta di equazione $y = 6$ viene trasformata nella retta $y' = 0$ cioè nell'asse delle ascisse come rappresentato dalla figura seguente:



Il volume dovuto alla rotazione della regione **S** attorno all'asse delle ascisse nel nuovo sistema di riferimento sarà allora:

$$V_S = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[-x^2\right]^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36\sqrt{6}\pi}{5}$$

per cui in definitiva il volume richiesto sarà pari a

$$V = V_C - V_S = 36\sqrt{6}\pi - \frac{36\sqrt{6}\pi}{5} = \frac{144\sqrt{6}\pi}{5}$$

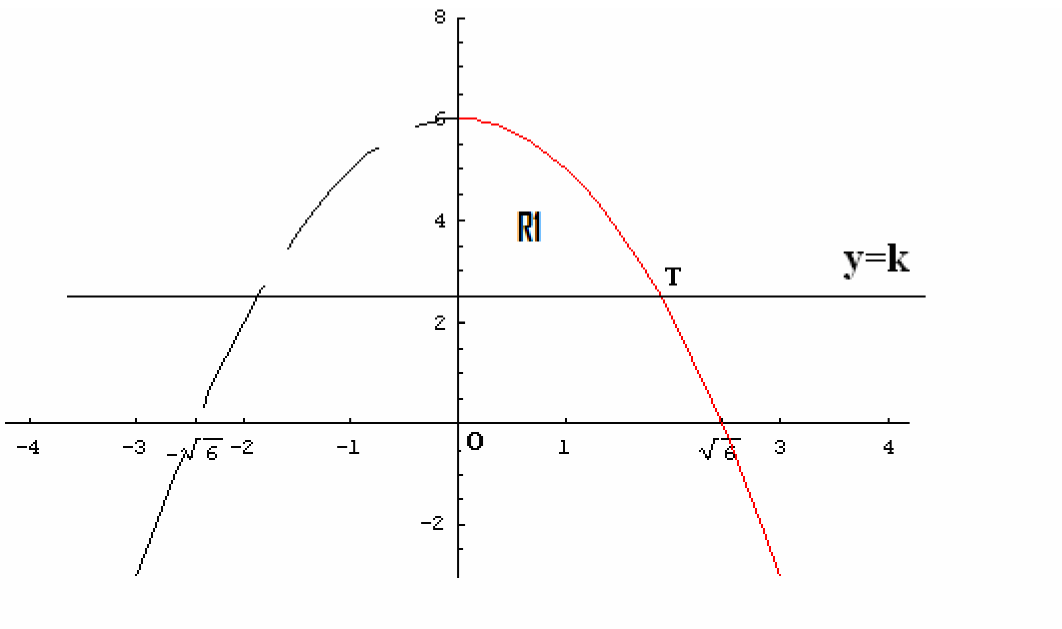
3)

L'area della regione **R** è:

$$A(R) = \int_0^{\sqrt{6}} \left(6 - x^2\right) dx = \left[6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6}} = \left[6\sqrt{6} - 2\sqrt{6}\right] = 4\sqrt{6}$$

oppure in modo alternativo, sfruttando il teorema di Archimede, per cui l'area del segmento parabolico è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto si ha: $A(R) = \frac{2}{3} * 6 * \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$ come già evidenziato.

Si consideri ora la figura seguente:



Ora dobbiamo trovare il valore di $y = k,\ 0 < k < 6$ che rende le due aree uguali e questo lo si ricava imponendo che l'area $A(R_1)$ della regione R_1 sia pari a $2\sqrt{6}$.

Il punto T avrà coordinate $T = \left(\sqrt{6-k}, k\right)$. L'area della regione A sarà pari ad allora:

$$A(R_1)=\int_0^{\sqrt{6-k}}\left[\left(6-x^2\right)-k\right]dx=\left[(6-k)x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6-k}}=$$
$$=(6-k)\sqrt{6-k}-\frac{\left(\sqrt{6-k}\right)^3}{3}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{6-k}\right)^3$$

Ora dobbiamo imporre che

$$A(R_1)=2\sqrt{6}\Rightarrow$$
$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{6-k}\right)^3=2\sqrt{6}\Rightarrow(6-k)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{6}=3^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$
$$6-k=3\sqrt[3]{2}\Rightarrow k=6-3\sqrt[3]{2}$$

valore accettabile perché $0<k<6$.

Una soluzione alternativa di questo quesito prevede ancora l'applicazione del teorema di Archimede per l'area di un segmento parabolico.
In tal caso, a norma del teorema suddetto, l'area $A(R_1)$ del segmento parabolico sarà sempre pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto ad esso, per cui:

$$A(R_1)=\frac{2}{3}|(6-k)|\sqrt{6-k}=\frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k}$$

in cui il valore assoluto è superfluo perché $0<k<6$, da cui imponendo che $A(R_1)=2\sqrt{6}$ si ha:

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{6-k}\right)^3=2\sqrt{6}\Rightarrow(6-k)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{6}=3^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$
$$6-k=3\sqrt[3]{2}\Rightarrow k=6-3\sqrt[3]{2}$$

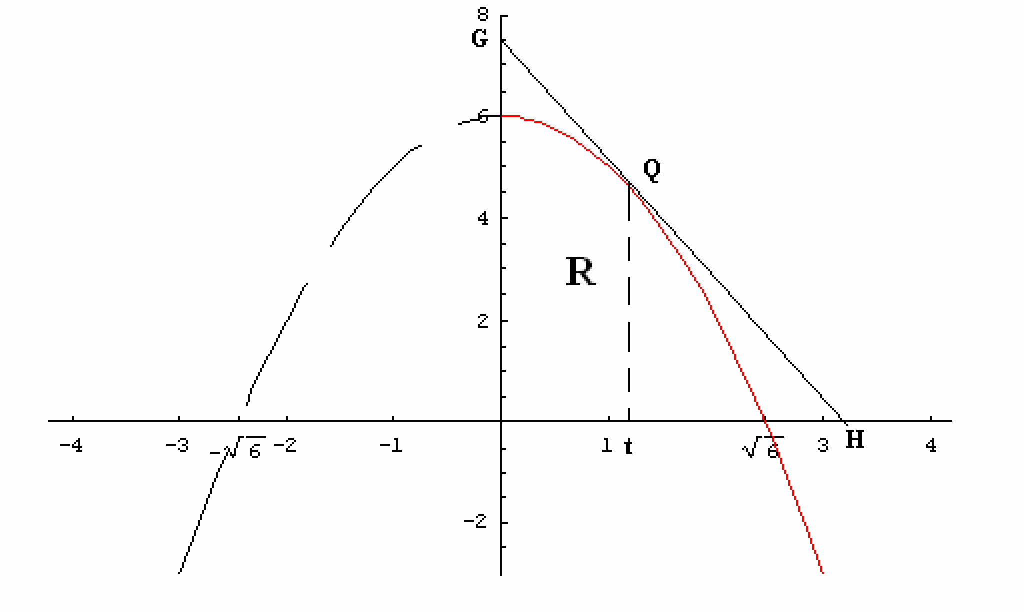
risultato analogo al precedente.

4)

Il punto generico appartenente alla parabola di equazione $y=6-x^2$ ha coordinate $Q=(t,6-t^2)$.
La tangente in Q ha equazione:

$$y-\left(6-t^2\right)=m(x-t)$$
$$m=y'(t)=-2t\Rightarrow y=-2tx+\left(6+t^2\right)$$

Per il calcolo dell'area di interesse si consideri la figura sottostante:



Il punto G ha coordinate $G=\left(0,t^2+6\right)$, mentre $H=\left(\frac{t^2+6}{2t},0\right)$, per cui l'area del triangolo OGH sarà:

$$\begin{cases} A(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+6}{2t}\right)\left(t^2+6\right)=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t} \\ 0<t<\sqrt{6} \end{cases}$$

Per cui $A(1)=\frac{49}{4}$.

5)

Per la minimizzazione richiesta si procede attraverso il calcolo delle derivate:

$$A'(t)=\frac{16t^2\left(t^2+6\right)-4\left(t^2+6\right)^2}{16t^2}=\frac{\left(t^2+6\right)\left(4t^2-t^2-6\right)}{4t^2}=\frac{\left(t^2+6\right)\left(3t^2-6\right)}{4t^2}>0\Rightarrow$$
$$\sqrt{2}<t<\sqrt{6}$$

mentre $A''(t)=\frac{3\left(t^4+12\right)}{2t^3}$ per cui $A''(\sqrt{2})=\left[\frac{3\left(t^4+12\right)}{2t^3}\right]_{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}>0$ per cui il valore che minimizza l'area del triangolo è $t=\sqrt{2}\Rightarrow A_{MIN}=8\sqrt{2}$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0\,;+\infty\,[$ da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty\,[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

1)

Per ipotesi sappiamo che $f(0)=1$, per cui affinché la funzione

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1 \quad x>0 \end{cases}$$

sia continua in $x=0$, dobbiamo provare che $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1\right]=1$. Ed in effetti ricordando il teorema di De l'Hospital si ha che $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$ per cui

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x^2}{2}\right]-\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x+1=0-1+1=1$$

Quindi la funzione considerata è continua in $x=0$.

Vediamo ora la derivabilità, calcolando la derivata di $f(x)=\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1$ per $x>0$.

Si ha:

$$f'(x) = 3x - x - 2x\ln x = 2x - 2x\ln x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+}\left[2x - 2x\ln x\right] = \lim_{x\to 0^+} 2x - \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x = 0 - \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{2x}} \stackrel{H}{=} -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

per cui la funzione presenta anche la derivata destra in $x = 0$ pari al valore di quella sinistra e cioè $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ e ciò dimostra la derivabilità della funzione stessa. Inoltre ricordando che per funzioni di una sola variabile reale la derivabilità implica la continuità, la dimostrazione della derivabilità in $x = 0$ implica anche la continuità della funzione in $x = 0$.

2)

Per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha un'unica radice reale in $\left[0,+\infty\right[$ ricordiamo la derivata della funzione $f(x) = \frac{x^2}{2}\left(3 - 2\ln x\right) + 1$ per $x > 0$:

$$f'(x) = 2x - 2x\ln x = 2x(1 - \ln x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq e$$

per cui nell'intervallo $0 < x \leq e$ la funzione è crescente ed assumerà certamente valori positivi essendo $f(0) = 1 > 0$, mentre in $\left[e,+\infty\right[$ la funzione è decrescente. Inoltre
Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\left(3 - 2\ln x\right) + 1\right] = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left(3 - 2\ln x\right) = 1 + (+\infty)(-\infty) = 1 - \infty = -\infty$$

dal momento che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty, \lim_{x\to+\infty}\left(3 - 2\ln x\right) = -\infty$. Questo significa che in $\left[e,+\infty\right[$ $\exists! \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$. Questo valore lo si trova applicando il teorema degli zeri. Ad esempio $f(4) = 8\left(3 - 4\ln 2\right) + 1 > 0, f(5) = \frac{25}{2}\left(3 - 2\ln 5\right) + 1 < 0$ per cui questa unica radice reale si troverà certamente nell'intervallo [4,5], e può essere calcolata con uno dei metodi numerici a disposizione, come il metodo di bisezione.

3)

Studiamo ora la funzione

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{2}\left(3 - 2\ln x\right) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Dominio: $x > 0$ anche se abbiamo visto che essa è prolungabile per continuità in $x = 0$

Intersezioni asse delle ascisse: come gia notato $\exists! \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$ e si ha $\bar{x} \in [4,5]$

Intersezioni asse delle ordinate: l'unica intersezione è nel punto di prolungabilità per continuità e cioè (0,1).

Positività: come notato dallo studio della derivata prima, e dall'identificazione dell'unico zero reale presente la funzione è sempre crescente $0 < x \le e$ (con $f(0) = 1 > 0$) e decrescente $[e,+\infty[$, per cui la funzione è positiva in $[0, \bar{x})$ e negativa altrove.

Asintoti verticali: non ce ne sono vista la prolungabilità per continuità in $x = 0$

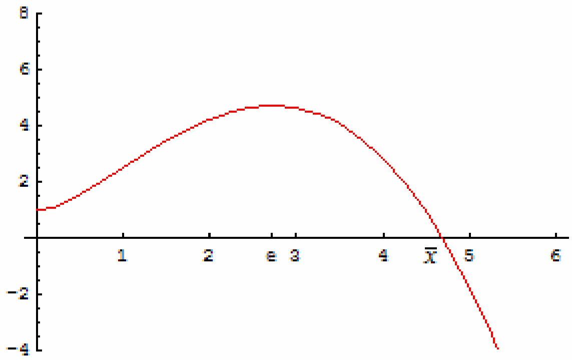
Asintoti orizzontali: non ce ne sono visto che $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1 \right] = -\infty$ come già evidenziato.

Asintoti obliqui: non ce ne sono poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1 \right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{2}(3 - 2\ln x) + 1 \right] = -\infty$

Crescenza e decrescenza: lo studio della derivata prima comporta che la funzione è sempre crescente $0 < x \le e$ e decrescente $[e,+\infty[$, mentre la derivata seconda per $x > 0$ è pari a $f''(x) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ per cui in $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ la funzione ha un flesso; inoltre $f''(e) = -2 < 0$ per cui il punto $\left(e, \frac{e^2}{2} + 1\right)$ è un massimo relativo ed assoluto per la funzione.

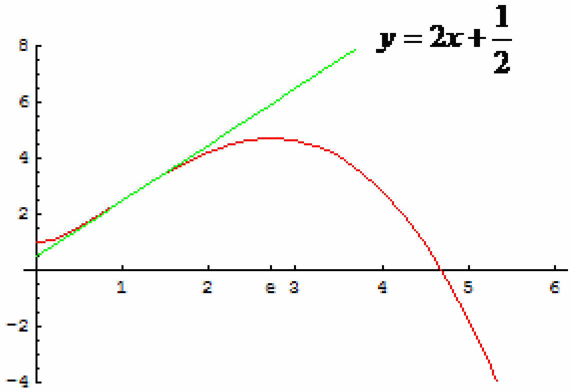
Il grafico è sotto presentato:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1 & x > 0 \end{cases}$$



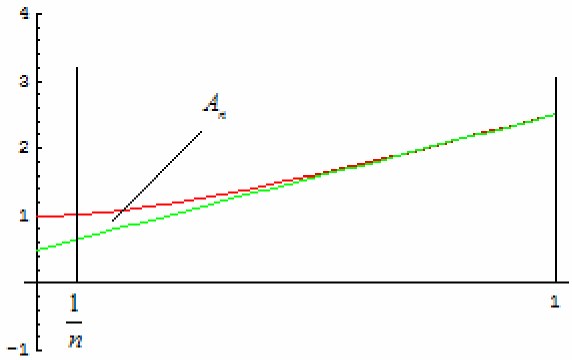
Nel punto $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ la tangente ha equazione $y = m(x-1) + \frac{5}{2}$ con $m = f'(1) = (2x - 2x\ln x)_{x=1} = 2$

per cui la tangente ha equazione $y = 2x + \frac{1}{2}$:



4)

Si consideri la figura seguente che è uno zoom della regione di interesse della figura precedente:



L'area richiesta è

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2}\right) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x \right] dx$$

Ricordando l'integrazione per parti si ha:

$$\int \left(x^2 \ln x\right) dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

per cui

$$A_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{3x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x\right]dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=\left[\frac{11x^3}{18}-x^2+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=$$
$$=\frac{11}{18}-1+\frac{1}{2}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{9}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{\ln(n)}{3n^3}$$

5)

Va calcolato il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{\ln(n)}{3n^3}\right]=\frac{1}{9}+\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3}\right)$$

Ora $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$ essendo i tre limiti banalmente nulli.

Inoltre applicando de l'Hopital si ha per l'altro limite: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3}\right)\overset{H}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{9n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9n^3}=0$ per cui $\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{\ln(n)}{3n^3}\right]=\frac{1}{9}+\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3}\right)=\frac{1}{9}$

Questo risultato lo si interpreta geometricamente col fatto che se $n\to+\infty$ la retta $x=\frac{1}{n}$ tende all'asse delle ordinate, per cui A_∞ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ordinate e la sua tangente inflessionale in $\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

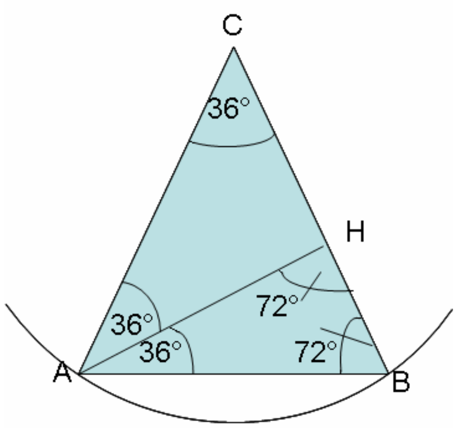
QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°, sen36°*.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x \, sen \, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen \, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen \, x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali *k* è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg \, x - arctg \, \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Soluzione

1)

Si consideri la figura seguente:



L'angolo in $\hat{C} = 36°$ essendo la decima parte dell'angolo piatto, mentre il lato AB del triangolo ABC è evidentemente il lato del decagono inscritto, mentre AH è la bisettrice riferita al lato BC. In questo modo si ha: $H\hat{A}B = H\hat{A}C = 36° \Rightarrow AH = HC, A\hat{B}H = A\hat{H}B = 72° \Rightarrow HA = AB$. In questo modo il triangolo AHB risulta essere simile al triangolo di partenza ABC per cui vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{HB}{AB} = \frac{CB - CH}{CH}$$

Ora detto $CH = HA = AB = x$ l'uguaglianza si riscrive:

$$\frac{x}{r} = \frac{r-x}{x} \Rightarrow x^2 + rx - r^2 = 0 \Rightarrow x = r\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

di cui la soluzione accettabile è $x = r\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ essendo $CH = HA = AB = x$ il lato del decagono e quindi una quantità strettamente positiva. Per cui, ricordando che $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea dell'unità, si ha che il lato del decagono è sezione aurea del raggio.

Ora per il teorema dei seni applicato al triangolo AHB si ha:

$$\frac{AB}{\sin(72°)} = \frac{HB}{\sin(36°)} \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{\sin(72°)}{\sin(36°)} = \frac{2\sin(36°)\cos(36°)}{\sin(36°)} = 2\cos(36°) \Rightarrow$$

$$\cos(36°) = \frac{AB}{2HB} = \frac{AB}{2(CB - CH)} = \frac{AB}{2(CB - AB)} = \frac{r\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2r\left[1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]} = \frac{\sqrt{5}-1}{2(3-\sqrt{5})} = \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

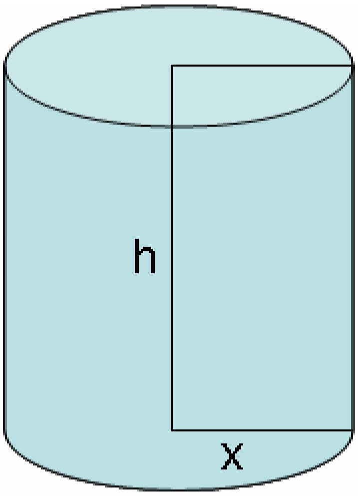
Ora $\sin(36°) = \sqrt{1-\cos^2(36°)} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ mentre

$$\sin(18°) = \cos(72°) = \sqrt{1-\sin^2(72°)} = \sqrt{1-\left(\frac{AB\sin(36°)}{HB}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)} =$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)} = \sqrt{1-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2)

Il cilindro circolare retto della figura sottostante ha raggio di base $x > 0$ ed altezza $h > 0$.



La sua superficie totale sarà allora

$$A_T = A_{basi} + A_{laterale} = 2\pi x^2 + 2\pi hx$$

Inoltre per ipotesi $V = \pi hx^2$ da cui $h = \frac{V}{\pi x^2}$ per cui

$$A_T = 2\pi x^2 + 2\pi hx = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

L'obiettivo è ora di minimizzare l'area totale, per cui si calcolano le derivate:

$$A_T' = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2(2\pi x^3 - V)}{x^2} > 0 \Rightarrow \pi x^3 - V > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$A_T'' = 4\pi + \frac{4V}{x^3}$$

$$A_T''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 8\pi > 0$$

per cui il minimo dell'area totale lo si raggiunge quando $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ da cui

$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{VV^{-\frac{2}{3}}2^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{\pi} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x$. Quindi il minimo dell'area totale lo si ha quando l'altezza è pari al diametro di base e quindi quando il cilindro retto risulta equilatero. Inoltre utilizzando i dati presenti si ha $V = 0.4l \cong 400cm^3$ da cui

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \cong 4cm$$
$$h = 2x \cong 8cm$$

3)

Affinché due curve $f(x), g(x)$ siano tangenti nel medesimo punto di ascissa x_0 deve aversi che

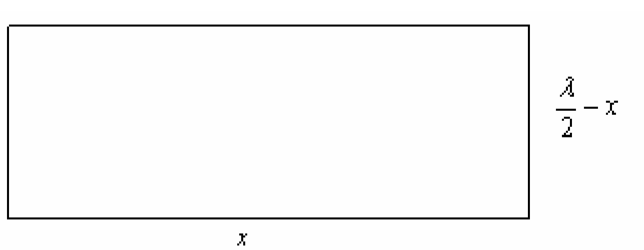
$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

La prima condizione per le curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = x$ comporta $\sin(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mentre la seconda impone $\sin(x_0) + x_0\cos(x_0) = 1$, equazione quest'ultima soddisfatta da $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ecco per cui è stato dimostrato che le due curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = x$ sono tangenti quando $\sin(x) = 1$.

Analogamente il discorso vale per $f(x) = x\sin(x), g(x) = -x$ per le quali la prima condizione impone $\sin(x_0) = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, mentre la seconda impone $\sin(x_0) + x_0\cos(x_0) = -1$, equazione quest'ultima soddisfatta da $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Ecco per cui è stato dimostrato che le due curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = -x$ sono tangenti quando $\sin(x) = -1$.

4)

Si consideri un rettangolo di perimetro $2p = \lambda$ e si identifichino i due suoi lati con $x, \frac{\lambda}{2} - x, 0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$ come di seguito rappresentato



L'area è:

$$A(x) = x * \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) = \frac{\lambda x}{2} - x^2, \; 0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda :

$$A^I(x) = \frac{\lambda}{2} - 2x > 0 \rightarrow 0 \le x < \frac{\lambda}{4}$$

$A^{II}(x) = -2 < 0 \forall x \Rightarrow x_{\max} = \frac{\lambda}{4}$ è l'ascissa del massimo, per cui $\left(\frac{\lambda}{2} - x_{\max} \right) = \frac{\lambda}{4}$ ed

$$\mathrm{A}_{\max} = \mathrm{A}(x_{\max}) = A\left(\frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\lambda^2}{16}$$

Cioè l'area massima la si ha in corrispondenza di un quadrato.

Una via alternativa, senza l'uso delle derivate, è notare che $A(x) = \frac{\lambda x}{2} - x^2$ è una parabola con concavità verso il basso per cui il massimo è in corrispondenza del vertice ed è pari a $\left(\frac{\lambda}{4}, \left(\frac{\lambda}{4} \right)^2 \right)$.

5)

Il numero di Nepero, come π, è un numero trascendente irrazionale cioè non è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali. Se a Nepero è attribuita la scoperta del numero **e**, ad Eulero va il merito di averlo approfondito e reso popolare. Fu Eulero per primo ad indicarlo con la lettera "**e**" ed a calcolarlo fino alla 13ª cifra decimale: **2.7182818284590**.

Le definizioni del numero di Nepero possono essere molteplici. Ne evidenzieremo tre. La prima si basa sul concetto di limite , per cui il numero di Nepero non è altro che $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

La seconda sfrutta l'espansione in serie di Taylor della funzione esponenziale per cui un'ulteriore definizione potrebbe essere fornita dalla somma della seguente serie convergente:

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots$$

Un modo alternativo (non standard) di definire ***e*** coinvolge le equazioni differenziali: il numero di Nepero si può definire come il valore in $x = 1$ della funzione $f(x)$ soluzione unica del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$ con condizioni iniziali $f(0) = 1$ e risolvibile semplicemente attraverso la separazione delle variabili come mostreremo a breve.

Il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che sotto alcune ipotesi, si dimostra fornire un'unica soluzione.

Per calcolarla basta ricordare le equazioni differenziali a variabili separabili: infatti l'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$, supponendo $f(x) \ne 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

Ed integrando ambo i membri in dx si ricava:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx \text{ cioè } \ln\left|f(x)\right|=x+k$$

Quindi il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases}\ln\left|f(x)\right|=x+k\\ f(0)=1\end{cases}$$

Dalla prima, per x=0, si ricava $\ln\left|f(0)\right|=k$ e ricordando che la condizione iniziale impone $f(0)=1$, allora si ricava $k=\ln 1=0$, per cui infine si ricava:

$$\ln\left|f(x)\right|=x\rightarrow\left|f(x)\right|=e^x\rightarrow f(x)=\pm e^x$$

In cui va scartata la soluzione $f(x)=-e^x$ perché non soddisfa la condizione iniziale.
In conclusione la soluzione esiste, è unica ed è l'autofunzione $f(x)=e^x$ che valutata in $x=1$ fornisce il numero di Nepero.

Il problema di Cauchy sopra svolto torna utile anche perché evidenzia come la funzione $f(x)=e^x$ abbia derivata coincidente con essa stessa (ecco per cui è chiamata autofunzione), per cui a questo punto avremmo risposto anche alla seconda domanda posta dal quesito.
Un ulteriore modo per dimostrare ciò è applicare la definizione e quindi effettuare il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}=e^x$$

dal momento che $\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}=1$ per il limite fondamentale.

6)

Matematicamente il fattoriale è definito in maniera ricorsiva e cioè:

$$n!=\begin{cases}n(n-1)! & n\geq 1\\ 1 & n=0\end{cases}$$

Nel calcolo combinatorio e probabilistico il simbolo n! indica il numero di permutazioni che si possono fare con n oggetti.
Ad esempio se volessimo conoscere quante parole è possibile comporre con n lettere prese a caso,

allora il numero di tali parole sarà $n! = n(n-1 = (n-2)(n-3)\ldots\ldots * 2 * 1$.
Prendiamo a tal proposito la parola TRE e vediamo quante altre parole si ricavano permutando le lettere T, R ed E: si hanno le seguenti parole:

TRE,TER,RTE,RET,ETR,ERT

cioè si hanno 6 parole come previsto dal fattoriale 3!=3*2*1=6.

Il legame col coefficiente binomiale viene fuori della potenza n-esima del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ è il cosiddetto coefficiente binomiale.

Il simbolo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ in termini probabilistici indica il numero di scelte che si possono fare con *k* oggetti a partire dagli *n* totali.
Ad esempio se lanciamo 5 volte una moneta non truccata e vogliamo sapere quante volte escono tre teste, utilizzando il coefficiente binomiale si ricava che tre teste escono un numero di volte pari a

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{120}{6*2} = 10$$

Infatti le possibili combinazioni di 3 teste sui 5 lanci in totale sono:
TTTCC, TTCTC, TTCCT, TCTCT, TCTTC, TCCTT, CTTTC, CTTCT, CTCTT, CCTTT.
Per cui la probabilità che escono tre teste in 5 lanci sarà, sfruttando la distribuzione binomiale ed essendo la probabilità di uscire testa pari a quella di uscire croce e pari ad $P(C) = P(T) = \frac{1}{2}$ visto che la moneta è non truccata:

$$P(3\,\text{TESTE}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Probabilità che potevamo calcolare anche rapportando i casi favorevoli (10) sui casi totali ($2^5 = 32$).

7)

La funzione $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ può essere anche riscritta in questo modo:

$$f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4) + 3 = x^2(x-2)^2 + 3$$

cioè come somma di un quadrato, che in quanto tale è sempre maggiore od uguale a zero, e di un numero maggiore di 2. Per questo motivo $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4) + 3 = x^2(x-2)^2 + 3 > 2 \ \forall x \in R$ e quindi non esiste alcun valore di $k : f(k) = 2$.

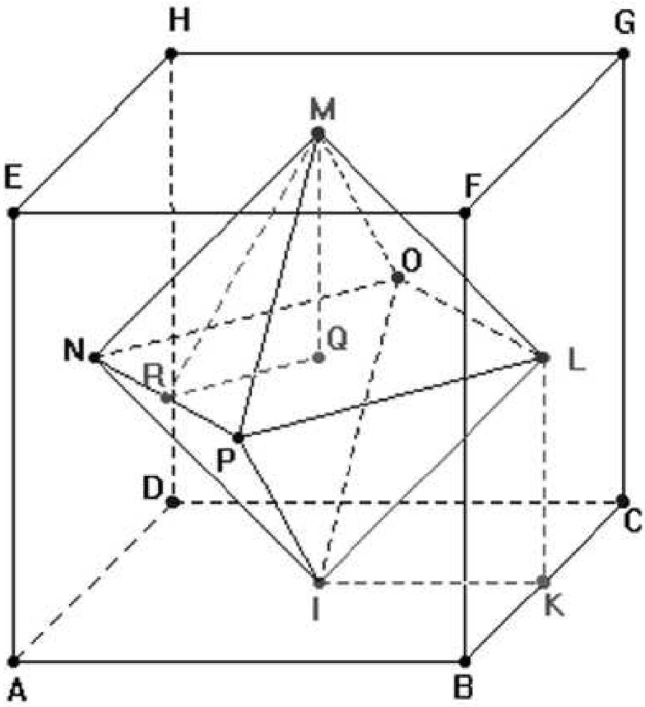
Un modo alternativo è risolvere l'equazione

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2(x-2)^2 = -1$$

che risulta impossibile perché un quadrato è un numero positivo o al massimo nullo, mai negativo.

8)

Si consideri la figura seguente che mostra la geometria del problema:



Lo spigolo IL dell'ottaedro lo si può ricavare applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele IKL. Infatti indicato con $AB = l$ la lunghezza dello spigolo del cubo, si ha $IK = KL = \frac{l}{2}$ per cui $IL = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$ e questo discorso può essere fatto per ogni spigolo del cubo e dell'ottaedro. Per cui tutti gli spigoli dell'ottaedro sono congruenti e l'ottaedro è di conseguenza regolare. Per quanto riguarda il volume dell'ottaedro, basta notare che esso è formato da due piramidi aventi il quadrato NOLP come base per cui

$$V_{ottaedro} = 2\frac{A_{NOLP} * MQ}{3} = 2\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 * \frac{l}{2}}{3} = \frac{l^3}{6}$$

mentre $V_{cubo} = l^3$ per cui $\frac{V_{cubo}}{V_{ottaedro}} = \frac{l^3}{\frac{l^3}{6}} = 6$

9)

La risposta al quesito è immediata se si ricorda che $\sin(90° - x) = \cos(x)$ per cui

$$\sin^2(35°) + \sin^2(55°) = \sin^2(35°) + \sin^2(90° - 35°) = \sin^2(35°) + \cos^2(35°) = 1$$

10)

La funzione $f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ha come dominio l'unione di due intervalli $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$.

La sua derivata risulta essere pari a:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} =$$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ora essendo la derivata nulla si può affermare che la funzione risulta essere costante in ogni intervallo chiuso e limitato non contenente $x = -1$ cioè in ogni intervallo del tipo [a,b] con $a > -1, b > -1$ oppure in intervalli del tipo [c,d] con $c < -1, d < -1$.

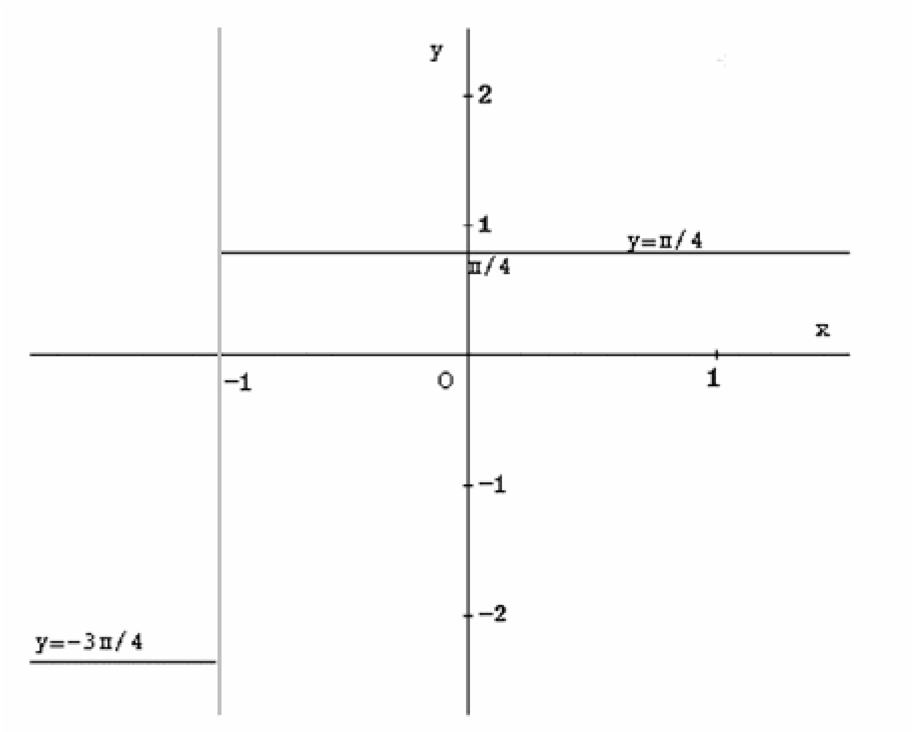
Per calcolare le costanti basta fare i due limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = \arctan(+\infty) - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = \arctan(-\infty) - \arctan(1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

Quindi in conclusione si può dire che la funzione $f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ è costante a tratti, dal momento che in $x = -1$ presenta un salto di discontinuità pari a π.

Vogliamo in ultima analisi evidenziare come la traccia sia ambigua, nel senso che avrebbe potuto trarre in inganno per come è formulata, visto che la funzione non è costante ma costante a tratti, ed il valore della costante, quindi, non è unica come evidenziato dalla figura sottostante.


y
2
1
y=π/4
π/4
x
-1
O
1
-1
-2
y=-3π/4