

CORSO SPERIMENTALE PNI

PROBLEMA N. 2

- d) Disegniamo intanto le parabole $y = x^2$ e $y^2 = 2x$. Entrambe le parabole hanno vertice nell'origine, ma la prima ha asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate e la seconda ha asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse.

Ricordiamo le formule del fuoco e della direttrice:

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) \text{ e } x = -\frac{1+\Delta}{4a} \text{ per la parabola con asse di simmetria verticale e:}$$

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right) \text{ e } y = -\frac{1+\Delta}{4a} \text{ per la parabola con asse di simmetria orizzontale.}$$

Ne segue che la parabola $y = x^2$ ha il fuoco di coordinate $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e direttrice $x = -\frac{1}{2}$; la parabola di equazione $y^2 = 2x$ ha il fuoco di coordinate $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ e direttrice $y = -\frac{1}{4}$.

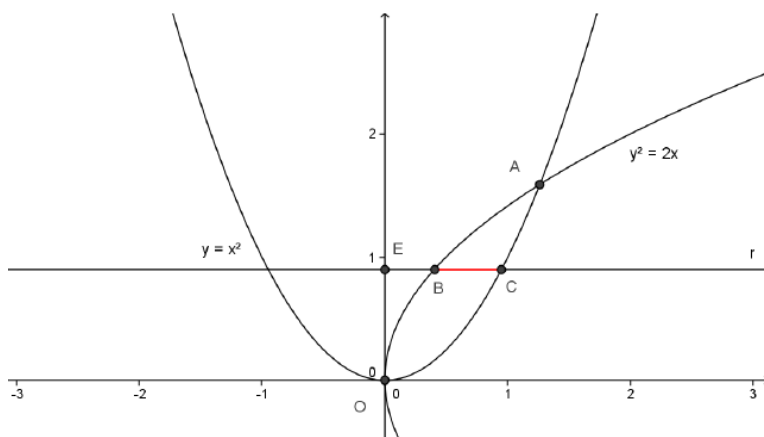
Intersecando le due parabole si ha:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = 2x \end{cases} \Rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Quindi l'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$ e quindi $A(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$.

b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della duplicazione del cubo che consiste nella costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo l assegnato.

Il problema della duplicazione del cubo, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolvibili con riga e compasso.



Per approssimare il numero $\sqrt[3]{2}$, usiamo il metodo delle tangenti, dopo aver notato che $\sqrt[3]{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$, cioè l'unica intersezione della funzione $h(x) = x^3 - 2$ con l'asse delle ascisse.

Infatti per il **teorema dell'esistenza degli zeri** la funzione assume valori opposti agli estremi dell'intervallo $[1,2]$, $h(1) = -1 < 0$ e $h(2) = 6 > 0$, per cui ha almeno uno zero appartenente a $(1,2)$; tale zero è unico in quanto la funzione $h(x) = x^3 - 2$ è strettamente crescente in \mathbb{R} ed in particolare in $(1,2)$.

Inoltre poiché $h'(x) = 3x^2$ e $h''(x) = 6x$, la funzione derivata seconda è positiva nell'intervallo considerato ed assume lo stesso segno di $h(x)$ nell'estremo $x_0 = 2$ (infatti $h(2) = 6 > 0$), preso $x_0 = 2$

come punto iniziale e applicando la formula ricorsiva $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$, si ha:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 2}{3x_0^2} = 2 - \frac{8 - 2}{12} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 - 2}{3x_1^2} = 1,5 - \frac{1,375}{6,750} \simeq 1,5 - 0,204 \simeq 1,296$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} = x_2 - \frac{x_2^3 - 2}{3x_2^2} = 1,296 - \frac{0,178}{5,041} \simeq 1,5 - 0,035 \simeq 1,261$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} = x_3 - \frac{x_3^3 - 2}{3x_3^2} = 1,261 - \frac{0,005}{4,770} \simeq 1,261 - 0,001 \simeq 1,260$$

Ne segue che il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} (approssimato per eccesso) è quindi $x = 1,26$.

d) Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = k$. Affinché intersechi la regione di piano **D** dobbiamo considerare $0 \leq x \leq \sqrt[3]{4}$.

Indicate con B e C le intersezioni della retta $y = k$ rispettivamente con $y^2 = 2x$ e $y = x^2$, ne segue che

$$B\left(\frac{k^2}{2}; k\right) \text{ e } C(\sqrt{k}, k).$$

La funzione "lunghezza del segmento BC " da rendere massima è allora:

$l(x) = x_C - x_B = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2}$ con $0 \leq x \leq \sqrt[3]{4}$, dove la lunghezza del segmento non è posta in modulo in quanto $x_C > x_B$.

Si ha:

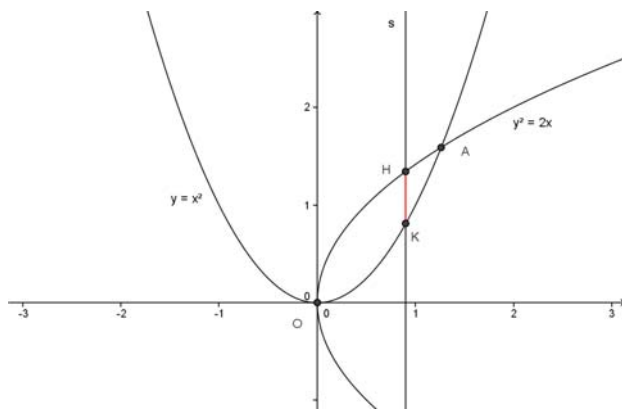
$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k, \text{ da cui:}$$

$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k = 0 \Rightarrow 1 - 2k\sqrt{k} = 0 \Rightarrow \sqrt{4k^3} = 1 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Dalla crescita e decrescita della funzione si ha:

$$l'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{4k^3}}{2\sqrt{k}} > 0 \text{ per } k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$l'(x)$	+	-
$l(x)$	↗	↘
x	$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	



Il segmento di lunghezza massima si ottiene, quindi, in corrispondenza della retta $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

d) Se si taglia il solido W , ottenuto dalla rotazione della regione **D** intorno all'asse x , si ottengono corone circolari di area

$$S(x) = \pi(\sqrt{2x})^2 - (\pi x^2)^2 = \pi(2x - x^4).$$

In particolare se il piano passa per l'origine si ottiene un punto e se passa per il punto A si ottiene un cerchio di raggio $\sqrt[3]{4}$.

Il volume richiesto si ha integrando la generica area $S(x) = \pi(2x - x^4)$ tra 0 e $\sqrt[3]{2}$. Si ha:

$$V_W = \int_0^{\sqrt[3]{2}} S(x) dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi(2x - x^4) dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{\sqrt[3]{2^5}}{5} \right) = \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right) = \frac{3}{5} \pi \sqrt[3]{4} \simeq 3.$$

Allo stesso risultato si giunge applicando la formula del volume del solido di rotazione:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Infatti, in questo caso:

$$V_W = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{\sqrt[3]{2^5}}{5} \right) = \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right) = \frac{3}{5} \pi \sqrt[3]{4} \simeq 3.$$