

QUESTIONARIO PNI

QUESITO N. 1

Dato il polinomio di grado n :

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, le sue derivate prima, seconda e terza sono:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1 ;$$

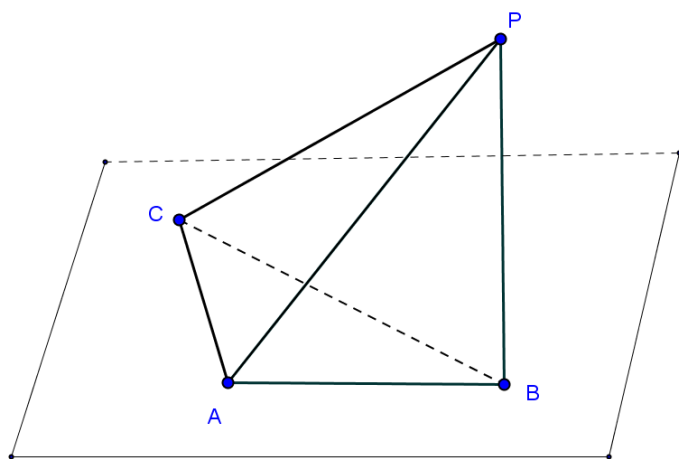
$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 2 a_2 ;$$

$$p'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots + 6 a_3 ;$$

ne segue che ogni derivata successiva elimina il termine noto di indice inferiore di una unità alla i -esima derivata effettuata ($i=1,2,3$); a sua volta i coefficienti a_i sono inizialmente moltiplicati per il rispettivo esponente e successivamente anche per numeri che vanno dal suo esponente iniziale fino ad 1.

Per la derivata n -esima si ha quindi:

$$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n .$$



QUESITO N. 2

Per ipotesi PB è perpendicolare in B al piano del triangolo ABC , PB è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per B e in particolare è perpendicolare ad AB e a CB ; ne segue intanto che i triangoli PAB e PAC sono rettangoli.

Per dimostrare che anche il triangolo PCA è rettangolo, applichiamo il **teorema delle tre perpendicolari**: “Se dal piede di una perpendicolare ad un piano α si conduce la perpendicolare ad una qualsiasi retta r del piano, quest’ultima retta risulta

perpendicolare al piano individuato dalle prime due”.

Se dal piede B della retta PB perpendicolare al piano del triangolo ABC si conduce la perpendicolare BA alla retta AC dello stesso piano (ABC è triangolo rettangolo in A per ipotesi), quest’ultima risulta perpendicolare al piano individuato da PB e AB , cioè al piano ABP ; quindi CA è perpendicolare a qualunque retta passante per A ed appartenente al piano PAB ; in particolare è perpendicolare alla retta PA e pertanto CAP è rettangolo in A .

QUESITO N. 3

Affinché la retta $y = ax$ sia tangente alla funzione

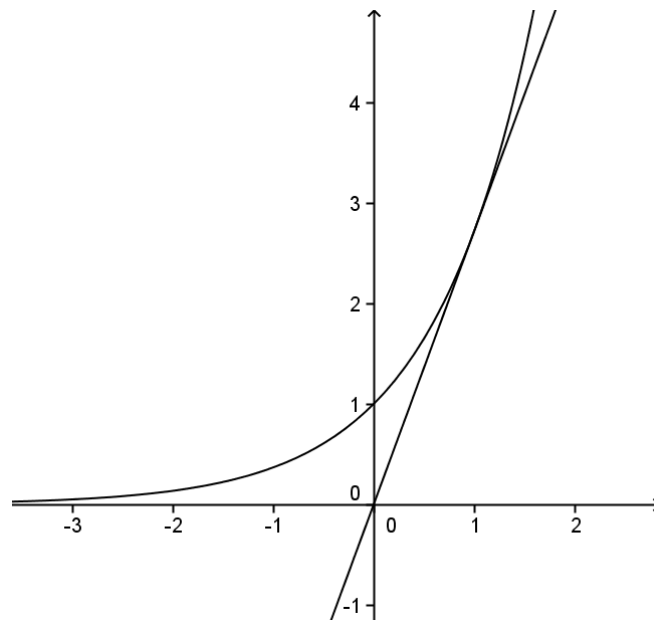
$f(x) = e^x$, ricordando il significato geometrico della derivata e che il punto di contatto $P(x_0, f(x_0))$ deve appartenere alla curva, occorre e basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f'(x_0) = e^{x_0} = a \\ f(x_0) = e^{x_0} = ax_0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$ax_0 = a \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow e^1 = a \Rightarrow e = a.$$

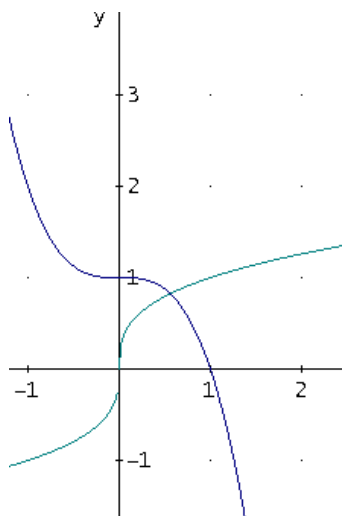
La retta tangente alla curva nel punto $P(1, e)$ ha allora equazione $y = ex$, dove “ e ” rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva, cioè la tangente



goniometrica dell'angolo formato da detta tangente ed il semiasse positivo delle ascisse.

Ne segue:

$$\tan \alpha = e \rightarrow \alpha = \arctan e = 69^{\circ}48'$$



QUESITO N. 4

$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ definita per ogni x appartenente ad \mathbb{R} .

Graficamente si ha l'intersezione tra le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f_2(x) = 1 - x^3$ da cui si può dedurre l'unicità della soluzione. La funzione è comunque sempre crescente in \mathbb{R} per cui avrà un'unica intersezione con l'asse delle ascisse.

Applicando il teorema dell'esistenza degli zeri, con $0 \leq x \leq 1$ come si può dedurre graficamente, si ottiene: $x=0,56$.

Infatti:

$$y = x^{(1/3)} + x^3 - 1$$

err = 0,010
1/100

a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)	b-a	b-a < err?	numero bisezion i
0,0000	1,0000	0,5000	-1,0000	1,0000	-0,0813	1,0000		
0,5000	1,0000	0,7500	-0,0813	1,0000	0,3304	0,5000	no	1
0,5000	0,7500	0,6250	-0,0813	0,3304	0,0991	0,2500	no	2
0,5000	0,6250	0,5625	-0,0813	0,0991	0,0035	0,1250	no	3
0,5000	0,5625	0,5313	-0,0813	0,0035	-0,0402	0,0625	no	4
0,5313	0,5625	0,5469	-0,0402	0,0035	-0,0187	0,0313	no	5
0,5469	0,5625	0,5547	-0,0187	0,0035	-0,0077	0,0156	no	6
0,5547	0,5625	0,5586	-0,0077	0,0035	-0,0021		stop	7

per
0,5547 difetto oppure si prende il punto medio dell'intervallo trovato, cioè
0,5625 per eccesso **x = 0,55859 cioè 0,56**

QUESITO N. 5

Per stabilire se il grafico G di una funzione $x \rightarrow f(x)$ è simmetrico rispetto alla retta $x=k$, sarà sufficiente applicare le equazioni della simmetria assiale:

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases} \text{ all'equazione della } f(x) \text{ ed osservare che l'equazione rimane invariata.}$$

QUESITO N. 6

Dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, si ricava facilmente:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \cos t \\ \frac{y}{2} = \cos t. \end{cases}$$

Ricordando la relazione fondamentale della trigonometria, elevando a quadrato entrambe le equazioni e sommandole membro a membro si ha:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

che è l'equazione di una ellisse.

QUESITO N. 7

È un esempio di probabilità condizionata, che come sappiamo riduce lo spazio Ω degli eventi; senza informazioni ho 4 casi possibili: MM, MF, FM, FF; con l'informazione ho lo spazio Ω' formato da 3 casi possibili: MF, FM, FF.
Quindi:

senza informazioni	con informazioni
$(\Omega) : MM, MF, FM, FF$	$(\Omega' = B) : MF, FM, FF$

Dati due eventi A e B definiti su uno spazio Ω con $p(B) \neq 0$, la probabilità dell'evento A condizionato alla realizzazione dell'evento B è data dal rapporto della probabilità dell'evento $A \cap B$ e la probabilità dell'evento B .

La probabilità dell'evento A condizionato B si indica con $P(A/B)$.

Per definizione è:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Essendosi verificato l'evento B (presenza di una femmina) il numero dei casi possibili è $n(B)$:

$$n(\Omega) \rightarrow n(B).$$

Poiché l'evento A si verifica quando si verifica l'evento $A \cap \bar{B}$ e $A \cap B$, risulta che il numero dei casi favorevoli all'evento A , essendosi realizzato B , è $n(A \cap B)$.

$$\frac{\text{casi possibili}}{\text{casi favorevoli}} \left| \begin{array}{c|c} n(\Omega) & n(B) \\ \hline n(A) & n(A \cap B) \end{array} \right|;$$

di conseguenza:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

nel nostro caso:

$$\frac{\text{casi possibili}}{\text{casi favorevoli}} \left| \begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right|;$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \rightarrow P(F/F) = \frac{n(F \cap F)}{n(F)} = \frac{1}{3}.$$

QUESITO N. 8

Se $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$, con $n > 3$, sono in progressione aritmetica, per la proprietà delle progressioni aritmetiche si ha:

$$\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-3} = 2 \binom{n}{n-2}.$$

Dopo aver ricordato la definizione di coefficiente binomiale: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, si ottiene:

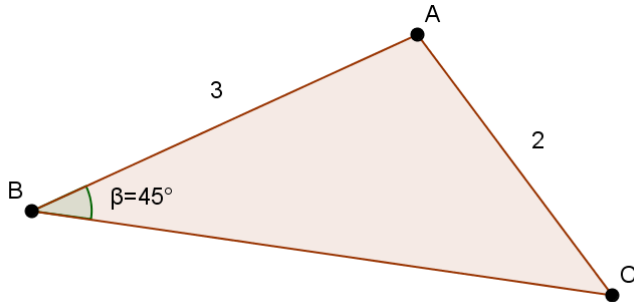
$$\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-3} = 2 \binom{n}{n-2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!1!} + \frac{n!}{(n-3)!3!} = 2 \frac{n!}{(n-2)!2!} \Rightarrow \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 2 \frac{n(n-1)}{2!};$$

Dividendo per $n \neq 0$ ($n > 3$) e fatto il m.c.m. si ha:

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{6} = n-1 \Rightarrow \frac{6+n^2-3n+2-6n+6}{6} = 0, \text{ da cui:}$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} n = 2 \text{ (non accettabile)} \\ n = 7 \end{matrix}.$$

QUESITO N. 9



Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC , con $\beta = 45^\circ$ si ha:

$$\frac{3}{\sin \gamma} = \frac{2}{\sin \beta}, \text{ da cui:}$$

$$\sin \gamma = \frac{3 \sin \beta}{2} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1, \text{ per}$$

cui è impossibile ricavare il valore di γ e non esiste alcun triangolo con i valori assegnati. Sempre applicando il teorema dei seni al triangolo ABC , con $\beta = 30^\circ$ si ha:

$$\frac{3}{\sin \gamma} = \frac{2}{\sin \beta}, \text{ da cui}$$

$$\sin \gamma = \frac{3 \sin \beta}{2} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1,$$

quindi è possibile ricavare il valore di γ .

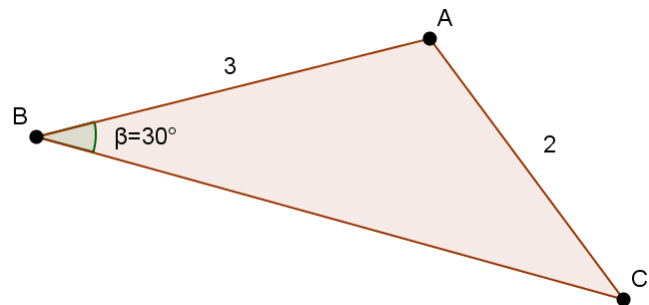
Esistono infatti due valori supplementare

per cui $\gamma = \arcsin \frac{3}{4}$; precisamente si ha:

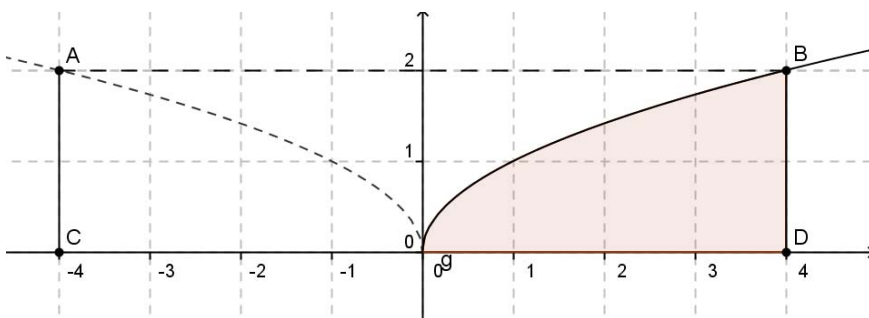
$$\gamma_1 = 48,59^\circ \quad \text{e}$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - 48,59^\circ = 131,41^\circ, \quad \text{entrambi}$$

accettabili; esistono pertanto due triangoli che soddisfano le condizioni assegnate.



QUESITO N. 10



Considerata la regione \mathbf{R} delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x=4$, viene richiesto qual è il volume del solido fornito dall'integrale:

$$\int_0^4 2\pi x (\sqrt{x}) dx = \int_0^4 2\pi (\sqrt{x^3}) dx.$$

Si ricava immediatamente che non può essere il volume del

solido generato da \mathbf{R} nella rotazione intorno all'asse x , risposta a), in quanto in tal caso abbiamo la formula:

$$\pi \int_0^4 (\sqrt{x^3})^2 dx = \pi \int_0^4 x^3 dx \text{ che non corrisponde all'integrale proposto.}$$

Facilmente si deduce che non può essere neppure il volume del solido di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio \sqrt{x} , risposta c), in quanto dopo aver osservato che l'area di un semicerchio di raggio \sqrt{x} vale $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}\pi x$, si ha la formula:

$$\frac{1}{2}\pi \int_0^4 x dx, \text{ che non corrisponde all'integrale proposto.}$$

Da una lettura attenta del testo si deduce che va preso in considerazione anche la risposta b), volume del solido generato da R nella rotazione intorno all'asse y , in quanto va calcolato il volume del solido richiesto e confrontato con il valore dell'integrale definito proposto (una lettura veloce del testo poteva portare a non considerare tale risposta in quanto la rotazione di \mathbf{R} intorno all'asse y presenta 0 e 2 come estremi di integrazione e y come variabile indipendente).

Intanto il valore dell'integrale proposto vale:

$$\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx = \int_0^4 2\pi(\sqrt{x^3}) dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{4}{5} \pi \sqrt{1024} = \frac{4}{5} \pi \cdot 32 = \frac{128}{5} \pi.$$

Inoltre il volume del solido generato da \mathbf{R} nella rotazione intorno all'asse y si ottiene sottraendo al volume del cilindro con raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $y = \sqrt{x}$ con x compresa tra 0 e 4 e quindi $x = y^2$, con y compresa tra 0 e 2.

Si ha:

$$V_{(SOLIDO)} = V_{(CILINDRO)} - \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \cdot 16 \cdot 2 - \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(32 - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{5} \pi.$$

Tale volume coincide con quello dell'integrale proposto, per cui la risposta corretta è la **b**).